Kapitel 1.

Logik und Mengenlehre

„*Piep – Piep – Piep – …*“ Diese Signalfolge ist wohl die kürzeste und einfachste Antwort auf die Frage, warum vor einigen Jahrzehnten die Mengenlehre erstmals in den Mathematikunterricht an den Schulen aufgenommen wurde. Sie erinnert an die Funksignale, die Sputnik 1, der erste künstliche Satellit, im Oktober 1957 zur Erde sendete.[1] Mitten im Kalten Krieg war es damit der Sowjetunion gelungen, die USA im Wettlauf zum Weltraum zu überholen. Der sogenannte Sputnik-Schock löste eine fieberhafte Suche nach der Ursache für diesen Erfolg aus und fand sie im vermeintlich überlegenen Bildungssystem der Sowjetunion. Dabei stand vor allem ein Thema weit vorne auf der Reformagenda der westlichen Industriestaaten – der Mathematikunterricht in der Schule. In den USA waren bereits einige Jahre zuvor Pläne für eine Reform des Mathematikunterrichts entwickelt worden. Unter der Bezeichnung „Neue Mathematik“, deren wesentlicher Bestandteil die Mengenlehre war, sollten von nun an Schulkinder möglichst früh mit abstrakten mathematischen Begriffen vertraut gemacht werden.

Während aber im Jahre 1969 im Rahmen der US-amerikanischen Apollo-11-Mission die erste Mondlandung erfolgreich durchgeführt wurde, kam es hierzulande für die Neue Mathematik eher zu einer Art Bauchlandung. Dafür waren eine Reihe von Gründen verantwortlich, möglicherweise auch diverse Berichte, in denen Mathematiklehrer über Krankheiten klagten, die angeblich durch den Mengenlehre-Unterricht an den Schulen hervorgerufen worden waren. Die besorgte Frage „*Macht Mengenlehre krank?*“, auf dem Titelblatt einer Ausgabe des Nachrichtenmagazins „Der Spiegel“ im Jahre 1974, macht auch für jüngere Generationen die Dramatik jener Jahre deutlich.

Mittlerweile haben sich die Wogen der öffentlichen Diskussion wieder geglättet, was wohl auch darauf zurückzuführen ist, dass die Mengenlehre im Mathematikunterricht an den Schulen nur noch eine geringe Rolle spielt. Entscheidend für unsere Zwecke ist die Tatsache, dass die Mengenlehre an den Hochschulen traditioneller Bestandteil der methodischen Grundausbildung für Wirtschaftswissenschaftler ist.

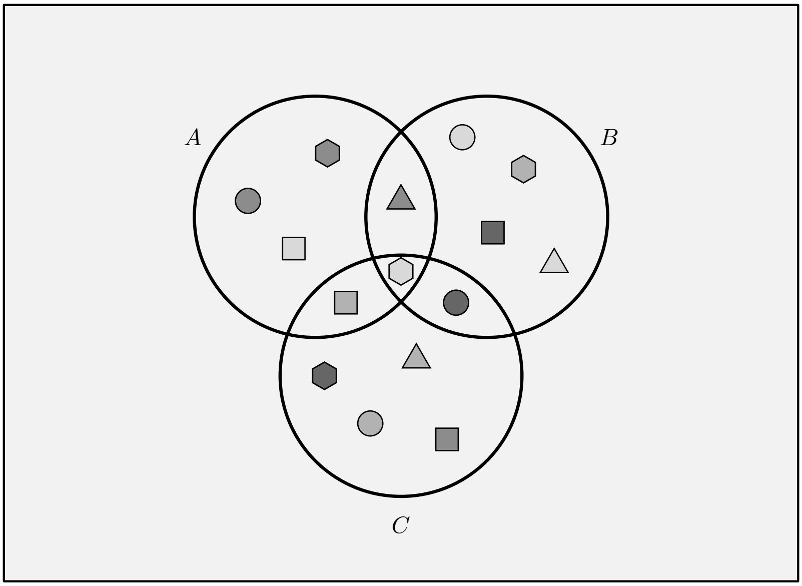

ABBILDUNG 1.1. Verschiedene Mengen von Bauklötzen

So werden etwa, im Rahmen der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ereignisse mit Hilfe von Mengen beschrieben. Die Darstellung von Ereignissen bzw. die Bildung neuer Ereignisse basiert damit auf den Regeln der Mengenlehre. Das im Jahre 1944 von v. Neumann und Morgenstern veröffentlichte Werk "*Theory of Games and Economic Behavior*", das die moderne Spieltheorie begründete, gilt übrigens als eines der ersten Bücher, in denen die Mengenlehre im Zusammenhang mit wirtschaftlichen Problemen verwendet wurde.

Es folgt ein kurzer Überblick über den Inhalt dieses Kapitels. Der erste Abschnitt behandelt einige Grundbegriffe der Logik. Dabei geht es insbesondere um logische Operationen, wie Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz. Ein eigener Abschnitt ist den Tautologien gewidmet. Darunter versteht man zusammengesetzte Aussagen, die immer wahr sind, unabhängig davon, welchen Wahrheitswert ihre Teilaussagen haben. Der dritte Abschnitt liefert dann eine Einführung in die Mengenlehre. Dazu gehören zunächst mengentheoretische Grundbegriffe wie Grundmenge, Teilmenge und leere Menge. Danach werden die wichtigsten Mengenoperationen vorgestellt – Komplement, Durchschnitt und Vereinigung – sowie die dazugehörigen Rechenregeln. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Zahlenmengen kurz beschrieben. Schließlich wird im letzten Abschnitt das kartesische Produkt von Mengen behandelt.

1.1. Logische Grundbegriffe

„Die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv“. Kein Leser dieses Buches wird das bezweifeln. Aus logischer Sicht würde man hier von einer wahren Aussage sprechen, wobei unter einer Aussage eine sprachliche Formulierung zu verstehen ist, die entweder wahr oder falsch ist.[2] Die Aussage „Das Quadrat einer Zahl ist negativ“ ist ein Beispiel für eine (offensichtlich) falsche Aussage. Die beiden Attribute „wahr“ bzw. „falsch“ nennt man auch Wahrheitswerte. Diese werden im Folgenden mit w bzw. f abgekürzt. Einer Aussage kommt somit entweder der Wahrheitswert w oder der Wahrheitswert f zu. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht.[3] Man beachte, dass es sich bei sprachlichen Formulierungen von der Art „x ist größer als 4“ nicht um eine Aussage handelt, da hier nicht klar ist, was der Buchstabe x bedeutet. In diesem Fall spricht man von einer Aussageform.[4] Diese wird dann zu einer Aussage, wenn für x eine konkrete Zahl eingesetzt wird.

Logische Regeln kommen ins Spiel, wenn aus gegebenen Aussagen neue (zusammengesetzte) Aussagen gebildet werden. Der Wahrheitswert zusammengesetzter Aussagen hängt dabei nicht nur vom Wahrheitswert der Teilaussagen ab, sondern auch von den speziellen logischen Operationen, durch die diese Aussagen miteinander verknüpft werden. Die wichtigsten Verknüpfungen (Operationen) sind dabei die Negation, die Konjunktion, die Disjunktion, die Implikation sowie die Äquivalenz. Diese werden im Folgenden kurz dargestellt.

Negation

Ist P eine Aussage, dann versteht man unter der Negation von P die entsprechende komplementäre Aussage, das heißt das Gegenteil von P. Die symbolische Bezeichnung dafür ist $\neg P$.[5] Betrachtet man die Aussage „Die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv“, dann lautet ihre Negation somit „Die Summe zweier positiver Zahlen ist nicht positiv“. Die letztere Aussage ist offensichtlich falsch. Allgemein gilt: Ist eine Aussage wahr, dann ist ihre Negation falsch, und umgekehrt. Dieser Sachverhalt lässt sich durch eine sogenannte Wahrheitstabelle[6] wie folgt darstellen

P	$\neg P$
w	f
f	w

wobei P für eine beliebige Aussage steht. Die erste Spalte enthält die möglichen Wahrheitswerte für die Aussage P (das heißt w bzw. f), in der zweiten Spalte findet man den jeweiligen Wahrheitswert für die Aussage $\neg P$.

Konjunktion

Unter der Konjunktion zweier Aussagen P und Q versteht man die zusammengesetzte Aussage „P und Q“, in symbolischer Schreibweise $P \wedge Q$. Da wir in diesem Fall zwei Einzelaussagen gegeben haben, muss man bei der zugehörigen Wahrheitstabelle berücksichtigen, dass es jetzt insgesamt vier mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten gibt:

P	Q	$P \wedge Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Aussage $P \wedge Q$ ist also nur dann wahr, wenn sowohl P als auch Q wahr sind. Ansonsten ist $P \wedge Q$ immer falsch. Ist etwa P die Aussage „4 ist eine natürliche Zahl“ und Q die Aussage “11 ist durch 2 teilbar“, dann ist die Aussage $P \wedge Q$ falsch, da die Aussage Q falsch ist.

Disjunktion

Unter der Disjunktion zweier Aussagen P und Q versteht man die zusammengesetzte Aussage „P oder Q“, in symbolischer Schreibweise $P \vee Q$. Die Wahrheitstabelle dazu lautet:

P	Q	$P \vee Q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Aussage $P \vee Q$ ist somit immer dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Ist zum Beispiel P die Aussage „5 ist kleiner als 8“ und Q die Aussage „5 ist gleich 8“, dann ist die Aussage $P \vee Q$ wahr, da zumindest eine der beiden Teilaussagen wahr ist, in diesem Fall die Aussage P. Bekanntlich kann man hier die beiden Aussagen P und Q auch durch die abgekürzte Schreibweise $5 \leq 8$ zusammenfassen.

Implikation

Will man von einer Aussage P auf eine Aussage Q schließen, dann ist eine spezielle zusammengesetzte Aussage relevant, die als Implikation bezeichnet wird. Ihre symbolische Bezeichnung ist $P \Rightarrow Q$. Bei der zugehörigen Wahrheitstabelle erkennt man, dass die Aussage $P \Rightarrow Q$ nur dann falsch ist, wenn P wahr und Q

falsch ist. Ansonsten ist $P \Rightarrow Q$ immer wahr. Insbesondere ist für eine falsche Aussage P die Implikation $P \Rightarrow Q$ stets wahr, unabhängig davon, ob die Aussage Q wahr oder falsch ist.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Dieser Wahrheitstabelle kann man eine wichtige Regel für das logische Schließen entnehmen. Angenommen, die Aussage P ist wahr und ebenso die Aussage $P \Rightarrow Q$. Dann ergibt sich unmittelbar aus der Wahrheitstabelle, dass in diesem Fall auch die Aussage Q wahr sein muss, da es ansonsten keine andere Möglichkeit gibt. Die beschriebene Situation entspricht genau der ersten Zeile der Wahrheitstabelle (unterhalb des Tabellenkopfes).

Für die Implikation haben sich verschiedene Sprechweisen eingebürgert. Am häufigsten ist wohl „aus P folgt Q“ bzw. „wenn P gilt, dann gilt Q“. Gelegentlich findet man auch Formulierungen wie „P ist eine hinreichende Bedingung für Q“ oder auch „Q ist eine notwendige Bedingung für P“.

Äquivalenz

Sind P und Q zwei Aussagen, dann versteht man unter der Äquivalenz von P und Q eine zusammengesetzte Aussage, bei der zwei Implikationen kombiniert werden, nämlich $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$. Bei der Äquivalenz handelt es sich um eine Art logischer Gleichheit, die symbolisch mit $P \Leftrightarrow Q$ bezeichnet wird. Sie ist immer dann wahr, wenn sowohl P als auch Q die gleichen Wahrheitswerte besitzen, ansonsten ist sie falsch. Hier ist die zugehörige Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wie bei der Implikation sind auch im Falle der Äquivalenz verschiedene Sprechweisen im Gebrauch. Für $P \Leftrightarrow Q$ sagt man häufig „P und Q sind äquivalent“, „P gilt genau dann, wenn Q gilt“ oder auch „P ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für Q“.